Lógica Matemática

09 *Formalização da Lógica Proposicional*■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Formalização

O que significa formalizar:

- Os símbolos em si mesmo não possuem nenhum significado inicial e são utilizados conforme regras de manipulação específicas.
- Nossas ferramentas de trabalho, digamos assim, são apenas aquelas especificadas pelo sistema construído.

Sistema Formal

Para especificarmos um sistema formal, precisamos de:

1. Um conjunto de símbolos (alfabeto);
2. Um conjunto de expressões (sequências finitas de símbolos) que serão chamadas de *fórmulas bem formadas* (fbf);
3. Um conjunto de fórmulas bem formadas, que serão chamadas de *axiomas*;
4. Um conjunto de *regras de dedução*, regras de que nos permitirão obter novas fórmulas a partir de fórmulas dadas.

Um sistema formal para a lógica proposicional

DEFINIÇÃO 1: Definimos um sistema formal $\mathcal{L}$ para a lógica proposicional da seguinte maneira:

1. Alfabeto: $\neg$, $\rightarrow$, (,), $p_1, p_2, \ldots$

2. Conjunto de fbf's:
   1. Para cada $i \geq 1$, p_i é uma fbf;
   2. Se A e B são fbf's, então $(\neg A)$ e $(A \rightarrow B)$ são fbf's;
   3. O conjunto de todas as fbf's é gerado pelos itens 2.1 e 2.2

Um sistema formal para a lógica proposicional

3. Axiomas. Temos três esquemas de axiomas. Se A, B e C são fbf's, então são axiomas:

(L1) $\big(A \to (B \to A)\big)$

(L2) $\Big(\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)\Big)$

(L3) $\Big(\big((\neg A) \to (\neg B)\big) \to (B \to A)\Big)$

Observe que todos os axiomas são tautologias.

Um sistema formal para a lógica proposicional

4. Regras de Dedução.

Nosso sistema $\mathcal{L}$ possuirá apenas uma regra de dedução, chamada de *Modus Ponens* (MP), que diz o seguinte:

(MP) Se A e B são fbf's, então de A e $(A \to B)$ podemos concluir B.

Dizemos, nesse caso, que B é conclusão de A e $(A \to B)$ por MP.

Prova

DEFINIÇÃO 2: Uma prova em $\mathcal{L}$ é uma sequência $A_1, A_2, \dots, A_n$ de fbf's tal que, para cada i, $1 \leq i \leq n$, ou A_i é um axioma ou A_i é conclusão obtida de fórmulas anteriores por meio de alguma regra de inferência do sistema (no nosso caso, MP).

Nesse caso, dizemos o seguinte:

- Esta prova é a prova de A_n em $\mathcal{L}$,
- A_n é teorema de $\mathcal{L}$.

Observações

1. Uma prova é uma dedução que parte dos axiomas.

2. Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ é uma prova em $\mathcal{L}$ e $k < n$, então $A_1, A_2, \dots, A_k$ também é uma prova em $\mathcal{L}$ e A_k também é um teorema.

3. Um axioma é um teorema cuja prova é uma sequência de uma única fórmula.

Dedução a partir de um conjunto de fórmulas

DEFINIÇÃO 3: Seja Γ um conjunto de fbf's de $\mathcal{L}$ (que não necessariamente precisam ser axiomas ou teoremas). Uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de fbf's de $\mathcal{L}$ é uma dedução a partir de Γ se, para cada i, $1 \leq i \leq n$, uma das três seguintes opções acontece:

a) A_i é um axioma de $\mathcal{L}$,
b) A_i é um elemento de Γ ou
c) A_i é conclusão obtida de fórmulas anteriores por meio de uma regra de inferência do sistema (no nosso caso, MP).

Nesse caso, dizemos o seguinte:

- A_n é dedutível de Γ ou consequência de Γ em $\mathcal{L}$.

Dedução de um conjunto de fórmulas

Algumas observações:

- Uma dedução a partir de Γ é ume espécie de prova na qual os elementos de Γ podem ser vistos como axiomas temporários.
- Se A é última fbf A de uma sequência de fbf's que é uma dedução a partir de Γ, escrevemos $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A$.
- Um teorema A de $\mathcal{L}$ é uma dedução a partir de $\emptyset$. Assim, escrevemos simplesmente $\vdash_{\mathcal{L}} A$.

- No próximo vídeo darei exemplos de provas e deduções.

Lógica Matemática

09 *Formalização da Lógica Proposicional*■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br